On Weighted Criteria of Set Optimization (Nonlinear Analysis and Convex Analysis)

AUTHOR(S):

黒岩, 大史

数理解析研究所講究録
1187 巻 2001 年 11-14

On Weighted Criteria of Set Optimization

島根大学総合理工学部　黒岩　大史 (Daishi Kuroiwa)

Department of Mathematics and Computer Science

Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University

1060 Nishikawatsu, Matsue, Shimane 690-8504, JAPAN

1　導入

本論文では集合値最適化問題の

- 重み付き評価基準
- 極大、極小点の概念
- ベクトル空間への埋め込み
- 存在性定理

について述べる。設定は以下であるとする。$(E, \leq)$ を線形順序空間であるとし、$\mathcal{O}$ を E の位相、C をこの順序を表す順序錐とし、C が閉集合であることを仮定する。また、$C^+ = \{x^* \in E^* \mid \langle x^*, x\rangle \geq 0, \forall x \in C\}$ とし、$\mathcal{A}$ を E の空でないコンパクト凸集合全体とする。

通常、ベクトル値最適化問題を考察する際には、集合 $A \subset E$ に対しての Efficiency の概念が重要になる。例えば、$x_0 \in A$ が A の極小点であるとは、$(x_0 - C) \cap A = \{x_0\}$ を満たすときをいい、(この点全体の集合を $\mathrm{Min}(A \mid C)$ と書く) 同様に、$x_0 \in A$ が A の極大点であるとは、$(x_0 + C) \cap A = \{x_0\}$ を満たすときをいう。

本論文で考察する内容は、重み付き評価基準による集合最適化問題である。ベクトル最適化問題同様に Efficiency の概念を考察する必要があるが、ここでは集合族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ に対しての極大点、極小点の概念を新しく導入し、このような極小点の存在性等の定理を、$\mathcal{A}$ をあるベクトル空間に埋め込むアイディアを用いることにより示す。

2　重みを考慮した集合族上の２項関係

まずは、$\mathcal{A}$ の２つの集合間におけるいくつかの順序を考慮した関係について定義する。重みベクトルの集合を $W \subset C^+$ とする。

Proposition 2.1 以下はすべて $\mathcal{A}$ 上の同値関係である。$A, B \in \mathcal{A}$ に対して、

- $A \equiv^l B \overset{\text{def}}{\iff} A + C = B + C$
- $A \equiv^l_W B \overset{\text{def}}{\iff} \forall y^* \in W, \langle y^*, A + C\rangle = \langle y^*, B + C\rangle$
- $A \equiv^u B \overset{\text{def}}{\iff} A - C = B - C$
- $A \equiv^u_W B \overset{\text{def}}{\iff} \forall y^* \in W, \langle y^*, A - C\rangle = \langle y^*, B - C\rangle$

$A \equiv^l B$ ならば $A \equiv^l_W B$ であることと、もし W が C^+ のベース、かつ E が局所凸空間のとき $A \equiv^l_W B$ ならば $A \equiv B$ であることが、比較的容易に確かめられる。

この 4 つの同値関係のうち、本論文では主に $\equiv^l_W$ について取り扱う。$\mathcal{A}$ の $\equiv^l_W$ による商空間 $\mathcal{A}/{\equiv^l_W}$ は、

$$\mathcal{A}/{\equiv^l_W} = \{[A] \mid A \in \mathcal{A}\}$$

で定義される。ただし、$[A] := \{B \in \mathcal{A} \mid A \equiv^l_W B\}$ である。ここで

Proposition 2.2 $[A], [B] \in \mathcal{A}/{\equiv^l_W}$ に対して

$$[A] \leq^l_W [B] \overset{\text{def}}{\iff} \forall y^* \in W, \langle y^*, A + C\rangle \supset \langle y^*, B + C\rangle$$

とすると、$\leq^l_W$ は $\mathcal{A}/{\equiv^l_W}$ での順序関係である。

集合族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ に対して、極大点、極小点の概念を導入する。

Definition 2.1 $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ に対して、

- $B_0 \in \mathcal{B}$ が $\mathcal{B}$ で (l, W)-極小である
  $\overset{\text{def}}{\iff}$ $[B] \leq^l_W [B_0]$ かつ $[B] \neq [B_0]$ を満たす $B \in \mathcal{B}$ が存在しない
  $\iff$ $B \in \mathcal{B}, [B] \leq^l_W [B_0]$ ならば $[B_0] \leq^l_W [B]$
- $B_0 \in \mathcal{B}$ が $\mathcal{B}$ で (l, W)-極大である
  $\overset{\text{def}}{\iff}$ $[B_0] \leq^l_W [B]$ かつ $[B] \neq [B_0]$ を満たす $B \in \mathcal{B}$ が存在しない
  $\iff$ $B \in \mathcal{B}, [B_0] \leq^l_W [B]$ ならば $[B] \leq^l_W [B_0]$

また (l, W)-$\mathrm{Min}\,\mathcal{B}$ を $\mathcal{B}$ で (l, W)-極小である要素全体とし、(l, W)-$\mathrm{Max}\,\mathcal{B}$ を $\mathcal{B}$ で (l, W)-極大である要素全体とする。

Example 2.1

(1) $|W| = 1$ の場合を考える: このとき、次の 2 条件は同値。
  (i) $B_0 \cap \mathrm{Min}\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \mid C\right) \neq \emptyset$
  (ii) $B_0 \in \mathcal{B}$ が $\mathcal{B}$ の (l, W)-極小、$W = \{y^*\}$ となる $y^* \in C^+ \setminus \{\theta^*\}$ が存在する。

(2) $F: X \to \mathcal{A}$、$\mathcal{B} = \{F(x) \mid x \in X\}$ のとき、$x_0 \in X$ が l-極小解 (see, [1]) ならば、$F(x_0) \in \mathcal{B}$ は $\mathcal{B}$ の (l, W)-極小である。逆は W が C^+ の基であるとき成立する。

(3) $E = \mathbf{R}^n$, $C = C^+ = \mathbf{R}^n_+$, and $W = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ のとき、

- B_0 が (l, W)-極小 $\iff$ $\operatorname{Inf} B_0 \in \operatorname{Min}(\{\operatorname{Inf} B \mid B \in \mathcal{B}\} \mid C)$
- B_0 が (u, W)-極小 $\iff$ $\operatorname{Sup} B_0 \in \operatorname{Min}(\{\operatorname{Sup} B \mid B \in \mathcal{B}\} \mid C)$

本論文では特に (l, W)-$\operatorname{Min} \mathcal{B}$ の存在性等について議論するが、それに際して $\mathcal{A}$ があるベクトル空間に埋め込まれることを示す。

3 ベクトル空間の構成

まずは $\mathcal{A}^2$ に関係 $\equiv^l_W$ を導入する。$\mathcal{A}$ 上の関係と同じ記号を用いているため、混同しないように注意すること。

Proposition 3.1 $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \mathcal{A}^2$ に対して、

$$(A_1, B_1) \equiv^l_W (A_2, B_2) \overset{\text{def}}{\iff} A_1 + B_2 \equiv^l_W A_2 + B_1$$

と定義すると、$\mathcal{A}^2$ 上の関係 $\equiv^l_W$ もまた同値関係である。

この関係による $\mathcal{A}^2$ の商集合は

$$\mathcal{A}^2/{\equiv^l_W} = \{[(A, B)] \mid (A, B) \in \mathcal{A}^2\}$$

で定義される。ただし、$[(A, B)] = \{(A', B') \in \mathcal{A}^2 \mid (A, B) \equiv^l_W (A', B')\}$ である。そしてこの商集合 $\mathcal{A}^2/{\equiv^l_W}$ 上に和とスカラ積を以下のように定義する。

$$[(A_1, B_1)] + [(A_2, B_2)] = [(A_1 + A_2, B_1, B_2)]$$

$$\lambda \cdot [(A, B)] = \begin{cases} [(\lambda A, \lambda B)] & \text{if } \lambda \geq 0 \\ [((-\lambda)B, (-\lambda)A)] & \text{if } \lambda < 0 \end{cases}$$

Proposition 3.2 $(\mathcal{A}^2/{\equiv^l_W}, +, \cdot)$ はベクトル空間である。

零ベクトルは $[(\{\theta\}, \{\theta\})]$($\theta$ は E の零ベクトル) であり、これを Θ と書く。次にこの空間上に関係 $\leq^l_W$ を導入する。$\mathcal{A}/{\equiv^l_W}$ 上の関係と同じ記号を用いているため、混同しないように注意すること。

Proposition 3.3 $[(A_1, B_1)], [(A_2, B_2)] \in \mathcal{A}^2/{\equiv^l_W}$ に対して、

$$[(A_1, B_1)] \leq^l_W [(A_2, B_2)] \overset{\text{def}}{\iff} A_1 + B_2 \leq^l_W A_2 + B_1$$

とすると、$\leq^l_W$ は $\mathcal{A}^2/{\equiv^l_W}$ 上の順序である。

ここで、$\mathcal{C} := \{[(A,B)] \in \mathcal{A}^2/{\equiv^l_W} \mid \Theta \leq^l_W [(A,B)]\}$ とすると、

Proposition 3.4 $\mathcal{C}$ は pointed な凸錐であり、

$$[(A_1,B_1)] \leq^l_W [(A_2,B_2)] \iff [(A_2,B_2)] - [(A_1,B_1)] \in \mathcal{C}$$

が成立している。また、この順序ベクトル空間上にはノルムを定義できる。

(A1) W が 汎弱コンパクト
(A2) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が $\sigma(Y^*,Y) \times \mathcal{O}_Y$ で連続

という仮定の元で、$[(A,B)] \in \mathcal{A}^2/{\equiv^l_W}$ に対して

$$\|[(A,B)]\| := \sup_{y^* \in W} |\min \langle y^*, A\rangle - \min \langle y^*, B\rangle|$$

と定義すると、

Proposition 3.5 $\|\cdot\|$ は $\mathcal{A}^2/{\equiv^l_W}$ 上のノルムである。

また $\mathcal{C}$ が閉集合であることは比較的容易に確かめられる。このとき、$\mathcal{A}$ は以下で定義される写像 $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^2/{\equiv^l_W}$ によって $\mathcal{A}^2/{\equiv^l_W}$ に埋め込まれる。

$$\varphi(A) := [(A,\{\theta\})]$$

このとき、次が成立する。

Proposition 3.6 $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ に対して、

$$B_0 \in \mathcal{B} \text{ が } (l,W)\text{-極小} \iff \varphi(B_0) \in \mathrm{Min}(\varphi(\mathcal{B}) \mid \mathcal{C})$$

Theorem 3.1 $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ に対して、

$\mathrm{Min}(\varphi(\mathcal{B}) \mid \mathcal{C}) \neq \emptyset \iff \varphi(\mathcal{B})$ は空でない $\mathcal{C}$-complete section を持つ。

ここで

$A,\ B \in \mathcal{A}$ に対して、$[(A,B)] = [(D,\{\theta\})]$ または $[(A,B)] = [(\{\theta\},D)]$ となる $D \in \mathcal{A}$ が存在するか？

という問題が考えられる。このことについて、

Proposition 3.7

- $E = \mathbf{R}^n$、W が一次独立で $|W| \leq n$ ならば成立
- $E = \mathbf{R}^2$、$|W| = 3$ ならば成立

参考文献

[1] D. Kuroiwa, "Observation on Set Optimization with Set-Valued Maps," RIMS Kokyuroku **1136** (2000), 162–165.

[2] D. T. Luc, "Theory of Vector Optimization," Lecture Note in Econom. and Math. Systems **319**, Springer, Berlin, 1989.